

# 基于微元法的长条波带片衍射成像分析

袁若瑜, 张煜浩, 张尚剑, 刘爽

(电子科技大学光电科学与工程学院 四川 成都 610054)

**【摘要】**本文基于微元法构建窄条单元, 并通过叠加的方法得到长条形波带片。首先分析窄条单元在观察屏上的衍射成像分布, 在此基础上通过近似算法对不同参数的长条形波带片进行衍射成像定量计算, 并对近似算法进行定量误差分析以衡量该算法的优劣。这种方法不仅能够动态地分析一系列长条波带片的衍射成像, 而且能够与现有的衍射成像案例建立联系, 有助于加深对长条形波带片以及波动光学下衍射的理解。

**关键词:** 微元法; 长条波带片; 窄条单元; 衍射

中图分类号 O436.1

文献标志码 A XXXXXXXXXXXXXXX

## Diffraction Imaging Analysis of Strip Zone Plate Based on Differential Element Method

YUAN Ruoyu, ZHANG Yuhao, ZHANG Shangjian and LIU Shuang

(SCHOOL OF OPTOELECTRONIC SCIENCE AND ENGINEERING, UESTC, SiChuan, ChengDu, 610054)

**Abstract:** In this paper, the narrow strip element is constructed based on the differential element method, and the strip zone plate is obtained by superposition. Firstly, the diffraction imaging distribution of the narrow strip element on the observation screen is analyzed. Then, the approximate algorithm is used to quantitatively calculate the diffraction imaging of the strip zone plate with different parameters. Then, the quantitative error of the approximate algorithm is analyzed to evaluate the advantages and disadvantages of the algorithm. This method can not only dynamically analyze the diffraction imaging of a series of strip zone plates, but also establish a connection with the existing diffraction imaging cases, which is helpful to deepen the understanding of strip zone plates and diffraction under wave optics.

**keywords** Differential element method; Strip zone plate; Narrow strip element; Diffraction

### 1 引言

在波动光学中, 基尔霍夫衍射公式完善了菲涅尔-惠更斯原理数学表达中的不足, 描述了光波通过障碍物后在光屏上的衍射成像特点。然而在计算衍射成像分布时, 被积函数的形式复杂, 即使在简单的衍射模型下, 也不易得到解析结果, 这为仿真带来了困难, 因此需要根据实际情况对其进行数学近似。目前, 已有多种处理波动光学成像的近似方法, 如: 远场衍射下的夫琅禾费近似, 杨氏双缝干涉中双缝到观察屏的距离差近似等等, 这些方法能够为数学化简提供便利。

要考察一种近似方法是否可行, 需要对近似前后的光场相位进行比较, 只有当光场相位差远小于  $\pi$  时, 这种近似才是成立的。

本文提出了一种近似算法, 基于微元法从长条形波带片中提取窄条单元, 使得它符合夫琅禾费衍射成像的要求, 然后通过累加的方式得到一定长度范围内的长条波带片, 进而说明长条形波带片的成像特点。为了评价这种方法得到的仿真结果, 本文对近似带来的误差进行定量分析, 从而证明这种方法的可行性。

## 2 窄条单元模型分析

### 2.1 窄条单元模型的建立

如图 1 所示,提取长条波带片的红色区域,当  $\Delta h$  足够小时 ( $\Delta h$  远小于第一波带的宽度,如:  $\Delta h=0.1mm$ ),将该长条区域叫做窄条单元。



图 1 长条波带片中窄条单元的构建

若将窄条单元上下平移,并保留窄条单元通过平移路径上的所有位置,则得到长条波带片,故窄条单元模型能够反映长条波带片的基本特性。由于窄条单元尺寸很小,因此在分析其光学特性时能够利用如夫琅禾费衍射公式等近似大大降低数学运算难度,从而利于研究长条波带片的成像规律。在本文提出的方法中,通过分析正交方向上的光场分布,仿真平行光通过窄条单元后在观察屏上的成像。

### 2.2 窄条单元模型的 x 方向光强分布

建立如下坐标系:观察屏位于  $xpy$  平面,窄条单元中心与观察屏的距离为  $z$ ,且窄条单元的横向与  $x$  方向平行,如图 2 所示:

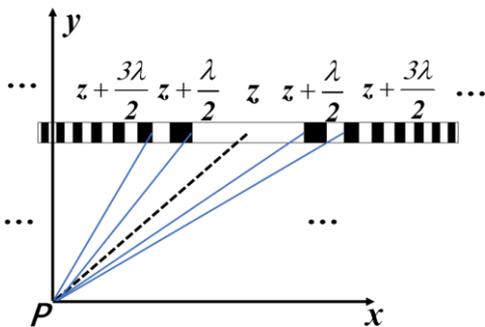


图 2 窄条单元示意图

由于窄条单元的尺度非常小,若将每一个窄条单元看作横向排列的小矩孔的叠加,则这些小矩孔在观察屏处的贡献可以利用夫琅禾费衍射近似。设窄条单元每一个矩孔宽度为  $a_m$ ,则中心矩孔在光屏面的衍射复振幅分布可以表示为:

$$E_{\text{矩}}(x, y) = \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \times F\{E(x_l, y_l)\} \quad (2-1)$$

为讨论  $x$  方向的复振幅变化,不考虑常数因子,可化简得:

$$E_{\text{矩}}(x, 0) = \exp\left(\frac{i\pi x^2}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi a_l x}{\lambda z}\right) \quad (2-2)$$

其中  $a_l$  为中心矩孔的横向长度。窄条单元可以看作若干个高度为  $\Delta h$  的中心矩孔横向排列,即窄条单元中每一个未被遮住的空白部分形成一个高度为  $\Delta h$ ,宽度为  $a_m$  的矩孔。设第  $j$  个波带边缘到窄条单元中心的距离为  $b_j$ ,那么在图 2 所示的坐标系下第一波带的矩孔衍射函数  $E(x, y)$  的横向分量为  $f_1 = E(x, 0), a_1 = 2b_1$ ; 第  $m$  波带的矩孔衍射函数横向分量为:

$$f_{\pm m} = E_{\text{矩}}\left(x \pm \frac{b_m + b_{m-1}}{2}, 0\right), a_m = b_m - b_{m-1} \quad (2-3)$$

根据夫琅禾费衍射公式,观察屏的光场分布可以由入射光场在孔径平面上的傅里叶变换得到,而傅里叶变换本身是线性的,故窄条单元中每一个小孔在观察屏上的  $x$  方向光场分布之和等于窄条单元在  $x$  方向的总分布,因此可以写为:

$$E_{\text{窄带}x} = f_1 + f_{\pm 3} + f_{\pm 5} + \dots \quad (2-4)$$

其不同波带数下的光强分布函数如图 3 所示:

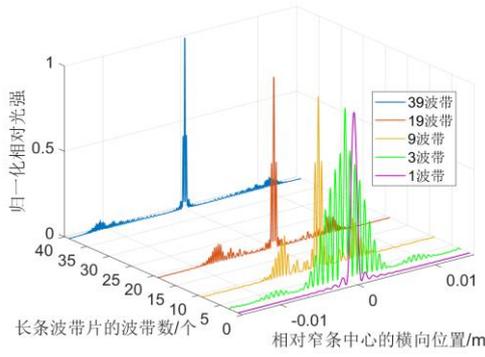


图3 窄条单元  $x$  轴方向光强仿真图

上图可以看出当波带数为1时,得到的结果为矩孔衍射的横向分布图样。当增加波带数后,可以明显看到衍射效应调制干涉效应的现象,该现象类似于多缝衍射的光场分布,但由于此时  $k$  ( $k=1,2,3\dots$ )个透光波带的横向宽度不同,因此结果与标准的多缝衍射之间有差异。当波带数较大时,横向的聚焦特性将更明显,这与波带片的特点相符。

## 2.2 窄条单元模型的 $y$ 方向光强分布

如图2所示,由惠更斯-菲涅尔原理可知:各个波带在  $y$  轴上一点  $R$  产生的振幅正比于对应波带面积,反比于对应波带到  $R$  点距离,且与相位因子  $K(\theta)$  有关。因此  $R$  点的振幅可以写作:

$$E_{\text{窄带}y,j} = C \frac{A_j K(\theta)}{R_j} e^{i\beta_j} \quad (2-5)$$

其中  $C$  是比例常数,  $A_j$  是第  $j$  波带的面积,  $R_j$  是第  $j$  波带到  $R$  点的距离。  $\beta_j$  为第  $j$  个波带到  $R$  点的相位值。在基尔霍夫衍射公式的近似中由于  $z$  远大于衍射屏和观察屏范围,窄条单元尺寸很小,故取  $K(\theta)=1$  得到的光场强度与精确值几乎吻合。对于窄条单元:

$$A_j = 2b_j dh \quad (2-6)$$

其中  $b_l$  为第  $l$  个波带到窄条单元中心的距离。由  $R_j$  的物理意义如图4所示

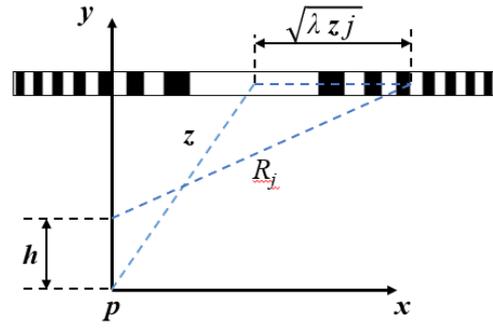


图4  $R_j$  的物理意义示意图

则:

$$R_j = \sqrt{h^2 + z^2 + \lambda z j} \quad (j=1,3,5,7,\dots) \quad (2-7)$$

由于平行光入射,在衍射屏表面的各波带处相位相同,因此对于相位  $\beta_j$  有:

$$\beta_j = \frac{2\pi R_j}{\lambda} \quad (2-8)$$

当高度  $h$  的一半远远小于衍射屏到光屏的距离  $z$  时,利用杨氏双缝干涉近似方法<sup>[1]</sup>,  $R_j+R_{j-1}$  可以由孔径平面到观察屏的距离的两倍表示。所以相邻两波带边缘到  $R$  点的距离差为:

$$R_j - R_{j-1} = \frac{R_j^2 - R_{j-1}^2}{R_j + R_{j-1}} \approx \frac{\lambda}{2} \quad (2-9)$$

由上式知,  $R_j - R_{j-1}$  恒定相差  $\lambda/2$ , 因此可表示为:

$$R_j = z + (m+j) \lambda/2 \quad (m>0) \quad (2-10)$$

当  $h$  不为0时,  $R_j$  可以看作比  $z+\lambda/2$  大一个常数,这个常数可以用  $\lambda m/2$  来表示,显然  $h$  不同,  $m$  的数值也不同。由式(2-10)、(2-7),忽略高阶项,得到:

$$m = \frac{h^2}{\lambda z} \quad (2-11)$$

根据式(2-8)、(2-10)、(2-11),得到相位的表达式:

$$\beta_j = \frac{\pi h^2}{z\lambda} + \frac{2\pi z}{\lambda} + \pi j \quad (2-12)$$

由于偶数波带被遮住,上式  $j$  只能取奇数值。相邻波带振幅近似相等,且相邻光程差为  $\lambda$ ,

因此有  $E_1 = E_2 = E_3 = \dots$  设窄条单元有  $N$  个波带, 结合式(2-5)、(2-6)、(2-7)、(2-12), 最终平行光通过窄条单元后在  $R$  点复振幅表达式为:

$$dE_{\text{窄带}y}(h) = C(N+1) \frac{b_1 dh}{\sqrt{h^2 + z^2 + \lambda z}} e^{i\left(\frac{\pi h^2}{z\lambda} + \theta\right)} \quad (2-13)$$

由于窄带的高度取得足够小 ( $\Delta h = 0.0001\text{m}$ ), 因此上述可以改为:

$$E_{\text{窄带}y}(y) = C(N+1) \frac{b_1 \Delta h}{\sqrt{y^2 + z^2 + \lambda z}} e^{i\left(\frac{\pi y^2}{z\lambda} + \theta\right)} \quad (2-14)$$

综上所述, 式(2-4)表示平行光通过窄条单元在光屏上的  $x$  方向光场分布, 式(2-14)表示其在  $y$  方向光场分布。

### 2.3 窄条单元模型在观察屏上的光强分布

根据夫琅禾费衍射公式, 对于图2中  $xpy$  平面上任一点  $(x,y)$  而言, 其相对光强为:

$$I(x,y) = |E_{\text{窄带}x}(x) E_{\text{窄带}y}(y)|^2 \quad (2-15)$$

因此利用上式, 并取  $\Delta h = 0.0001\text{m}$  进行 **MATLAB** 仿真, 得到平行光通过窄条单元的相对光强分布, 如图5所示。

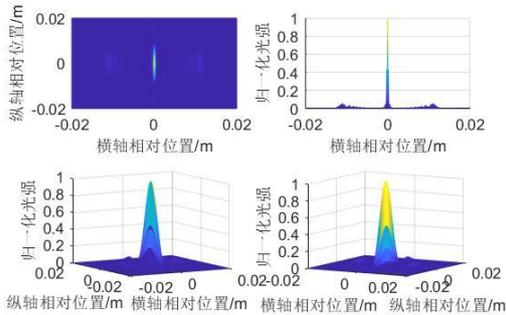


图5  $\Delta h = 0.0001\text{m}$  的窄条单元成像相对光强分布

### 3 基于微元法分析长条形波带片

根据第2节的思想, 下面利用窄条单元模型定量分析长条波带片的衍射成像光强分布。



图6 长条波带片的构建

如图6所示, 对于观察屏平面的  $y$  轴上任意一点  $R(0,h)$ , 平行光通过波带片对  $R$  点的作用可如此分析: 该点电场强度复振幅可以看成  $h_m/\Delta h$  个窄条单元在  $R$  点的电场复振幅的叠加, 其电场复振幅可以表示为:

$$E_R = \sum_1^{h_m/\Delta h} E_{sR} \quad (3-1)$$

其中  $s$  的含义是由下向上平移过程中第  $s$  个窄条单元编号。当  $s$  增加的时候, 第  $s$  个窄条单元对  $R(0,h)$  的作用可以看成第一个窄条单元对点  $R_s(0, h-(s-1)\Delta h)$ , 因此有关系式:

$$E_{sR} = E_{IR_s} \quad (3-2)$$

将式(3-2)代入式(3-1)得:

$$E_R = \sum_1^{h_m/\Delta h} E_{IR_s} \quad (3-3)$$

在窄条单元中,  $\Delta h = dh$ , 因此式(3-3)可以改写成观察屏上  $(0, y-h_m)$  到  $(0, y)$  点之间电场复振幅的积分:

$$E_R = \int_{y-h_m}^y C(N+1) \frac{b_1 dh}{\sqrt{h^2 + z^2 + \lambda z}} e^{i\left(\frac{\pi h^2}{z\lambda} + \theta\right)} \quad (3-4)$$

为了进一步简化式(3-4), 由于  $z$  远大于  $h$ , 记  $\beta = \pi/z\lambda$ , 式(3-4)可以表示如下:

$$E_R = \int_{y-h_m}^y k e^{i\beta h^2} dh, k = \frac{(N+1)b_1}{\sqrt{z^2 + \lambda z}} \quad (3-5)$$

关注相对光强, 去掉比例因子  $k$ , 可以表示为:

$$|E_R|^2 = \left( \int_{y-h_m}^y \cos\beta h^2 dh \right)^2 + \left( \int_{y-h_m}^y \sin\beta h^2 dh \right)^2 \quad (3-6)$$

取  $\beta=3 \times 10^6 m^{-2}$ , 改变长条波带片高度  $h_m$  的值, 结果如图 7 所示。

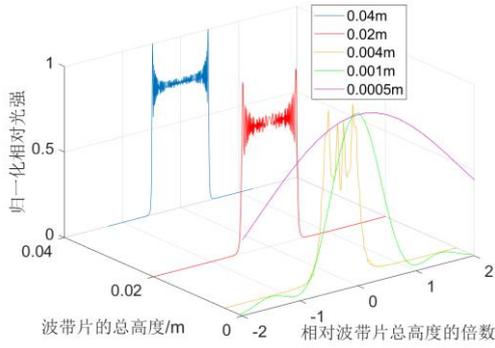
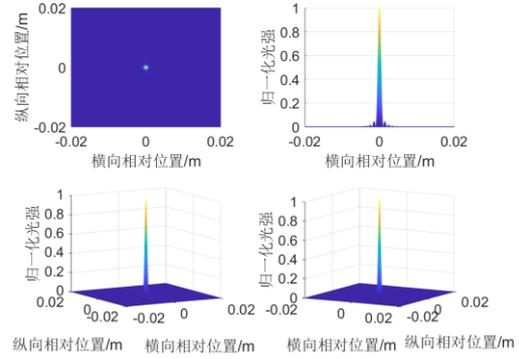


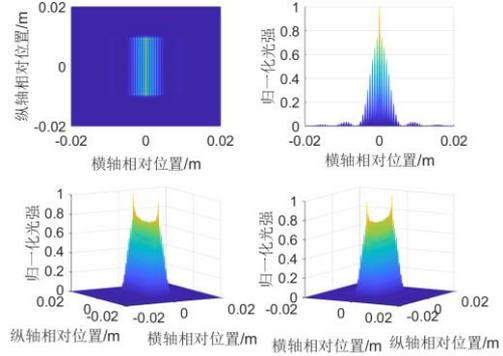
图 7 不同高度长条波带的相对光强

上图中  $x$  坐标表示垂直方向上相对长条波带片高度的考察范围, 反映衍射现象相对于波带片本身的占比情况。当平行光通过长条形波带片后, 随着波带长度的减小,  $y$  方向上的衍射效果将越来越明显。

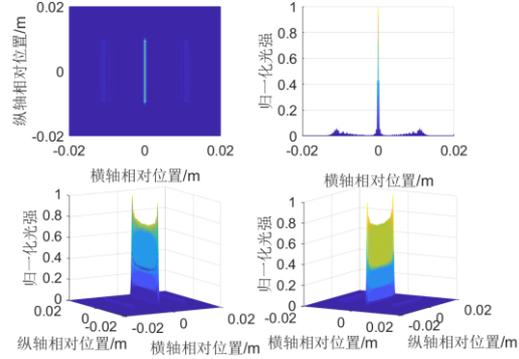
根据之前得到的结果进行整个观察屏上的光强仿真, 在单色平行光 400nm, 波带片与光屏间距为 2.5 米的情况下, 改变长条波带片横向波带数, 分别为 1 波带, 3 波带, 39 波带, 并分别设置不同高度以得到具有代表性的成像特点。衍射成像相对光强分布如图 8 所示, 原点设为波带中心处。可以看出, 图 8(a)的情况代表高度和宽度均为 0.001m 的矩孔衍射成像, 这与现有实验结果相符。图 8(b)的情况代表波带数为 3 的波带片衍射成像, 在这种情况下, 横向分布呈现出多缝衍射的规律。图 8(c)的情况代表典型的长条波带片的衍射成像, 特征在于横向分布具有很强的聚焦特性, 纵向是一条亮线。



(a)



(b)



(c)

图 8 (a) 1 波带, 高度为 0.001m 的矩孔衍射成像;  
(b) 3 波带, 高度为 0.02m 的波带片衍射成像;  
(c) 39 波带, 高度为 0.02m 的波带片衍射成像

## 4 误差分析

在本文的算法中, 由于总的光场分布是由各孔径平面区域在观察屏的子分布进行复振幅叠加而成。由于光波矢的数值非常大, 因此哪怕对光程进行很小近似, 求解相位的误差也可能非常大。因此一个好的近似算法

要求近似相位与精确相位的差值远小于  $\pi$ ，因此需要计算近似相位与精确相位的差值。

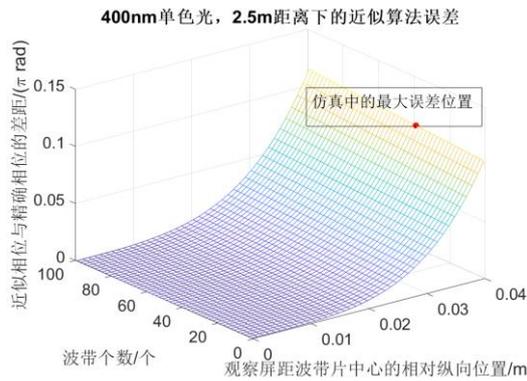
根据式(2-7)和式(2-8)，光场的精确相位为：

$$\beta_j^0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{h^2 + z^2 + \lambda zj} \quad (4-1)$$

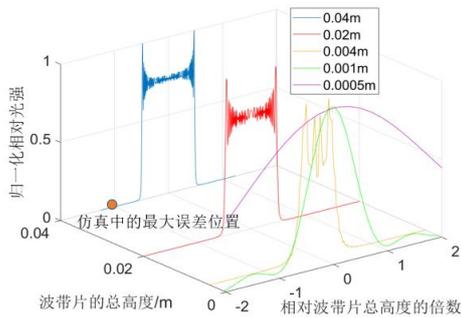
结合式(2-12)，有：

$$\Delta\beta_j = |\beta_j^0 - \beta_j| = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{h^2 + z^2 + \lambda zj} - \left( \frac{2\pi z}{\lambda} + \frac{h^2\pi}{\lambda z} + j\pi \right) \quad (4-2)$$

因此可以得到波带数和相位误差的关系图（反应观察屏的横向观测尺度）以及观察屏高度和相位误差的关系图（反应观察屏的纵向观测尺度）。当单色光波长为 400nm，孔径平面到观察屏的间距为 2.5m 时，如图 9 所示。



(a)



(b)

图 9 (a)精确解与近似解误差关系(b)最大误差点的位置示意图

在对典型的长条波带片衍射成像进行仿真时，可以取长条波带数为 39 个，观察屏纵向范围为 4cm，在这样的尺度下精确相

位和近似相位的差距在仿真中最大仅为  $0.1\pi$  弧度，符合远小于  $\pi$  的条件，因此保证了仿真的正确性。

## 5 总结

在长条波带片的衍射成像分析中，本文基于微元法，定量分析了平行光通过窄条单元的相对光强分布，并通过窄条单元构建了长条形波带片，实现了一系列参数可调节的长条形波带片衍射成像的仿真，并且对仿真精度进行定量误差分析。本文将仿真结果与现有的衍射成像结果进行对比，证明了这种方法的可靠性。

## 参考文献

- [1] 叶玉堂,肖峻,饶建珍.光学教程(第二版)[M].北京,清华大学出版社, 2011:161-162, 209-221.
- [2] 张斌智.波带片的设计及其衍射特性研究[D].杭州,浙江大学, 2010.
- [3] 任娜.平面波经矩孔衍射的矢量理论研究[D].临汾,山西师范大学, 2016.
- [4] 邢家省,杨小远,白璐.菲涅尔积分计算中一致收敛的证明方法[J].湖南,吉首大学学报(自然科学版), 2016, 37(05), 2-4.
- [5] 赵梓媛,孟庆国,孙文军.基于 MATLAB 网格夫朗禾费衍射场模拟分析[J].北京,物理与工程, 2016, 26 (06), 112-115.
- [6] 崔文乐.菲涅尔衍射的数值计算及其应用的研究[D].保定,河北大学, 2020.
- [7] 基于 MATLAB 的夫琅禾费矩孔衍射仿真[J].成都,实验科学与技术, 2013, 11(04), 320-322.
- [8] 曲伟娟,基于 Matlab 的光学实验仿真[D],西安,西北工业大学, 2004.